

オイラー・ベルヌーイ梁のランダム振動のモード解析

学籍番号 23413507 氏名 池田 達郎

指導教員名 杉山 勝

1 はじめに

加速度計や地震計のような測定機器から得られた記録を解析する場合、その記録から規則性を見つける作業は重要なことである。例えば車の設計では、走行時の地面からの車体の位置の記録を解析し、それを最小限に抑えるような設計を行うことで乗り心地の良さを向上させる。しかし、例に挙げたような記録はそのほとんどが不規則的な記録であり、規則性を見つけることが困難なためその解析は難しい。この不規則な記録のことを一般にランダム過程といい、ランダム過程になる振動をランダム振動という。ランダム振動を解析する場合、統計的な解析から規則性を見出していく。

本研究ではランダム振動解析を行う対象として梁を選び、理論的にモード解析を行い、モードごとの位置に対するたわみの2乗時間平均値をもとめ、その値をモードごとに比較することでどのモードが励起されやすいかを調べた。

2 運動方程式

オイラー・ベルヌーイ梁の曲げ振動の運動方程式は

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (1)$$

で与えられ、 x , t , $y(x, t)$, ρ , A , E , I はそれぞれ梁の長さに沿った位置、時間、梁のたわみ、面密度、断面積、縦弾性係数、断面2次モーメントであり、 $F(x, t)$ は梁に加わる外力である。 $y(x, t)$ が n をモード番号として時間関数 $\tau_n(t)$ ($n = 1, 2, 3 \dots$)と固有モード $Y_n(x)$ ($n = 1, 2, 3 \dots$)に変数分離できると仮定すると

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t), \quad y_n(x, t) = Y_n(x) \tau_n(t)$$

とかける。この場合、(1)式はモードの直交性を利用して以下のような1自由度振動系と同じ型の方程式に書き換えることができる。

$$m_n \frac{d^2 \tau_n}{dt^2} + k_n \tau_n = q_n(t)$$

ただし梁の長さを l として

$$m_n = \int_0^l \rho A Y_n^2 dx, \quad k_n = \int_0^l Y_n EI \frac{d^4 Y_n}{dx^4} dx$$

$$q_n(t) = \int_0^l F(x, t) Y_n dx$$

である。 $q_n(t)$ を一般化された外力という。時刻 $t=0$ に任意外力が加わった場合の $\tau_n(t)$ は

$$\tau_n(t) = \int_0^t q_n(\alpha) h_n(t - \alpha) d\alpha$$

$$h_n(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{1}{m_n \omega_n} \sin \omega_n t & (t > 0) \end{cases}$$

で与えられる。 ω_n は第 n モードの固有振動数である。[1]

3 位置に対するたわみの2乗時間平均値

外力がエルゴード過程であれば、 $\tau_n(t)$ の自己相関関数 $R_{\tau_n}(t)$ は定義により、 T を十分に大きい数として

$$R_{\tau_n}(\alpha) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tau_n(t) \tau_n(t + \alpha) dt$$

で与えられる。この式は $\alpha = 0$ の場合

$$R_{\tau_n}(0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tau_n^2(t) dt$$

となるので、 τ_n の2乗時間平均値 $E[\tau_n^2]$ は $R_{\tau_n}(0)$ に等しい。自己相関関数はWiener-Khintchine 関係

$$R_{\tau_n}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\tau_n}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

を用いてパワースペクトル密度関数 $S_{\tau_n}(\omega)$ から得られる。また、 $\tau_n(t)$ と $q_n(t)$ のパワースペクトル密度関数の関係が

$$S_{\tau_n}(\omega) = |H_n(\omega)|^2 S_{q_n}(\omega)$$

で与えられる。 $H_n(\omega)$ は $h_n(t)$ のフーリエ変換で求まる。以上により、 S_{q_n} がもとまれば $E[\tau_n^2]$ を求めることができ、各モードごとの位置に対するたわみの2乗時間平均値

$$\sqrt{y_n^2} = \sqrt{\tau_n^2 Y_n} = \sqrt{E[\tau_n^2] Y_n}$$

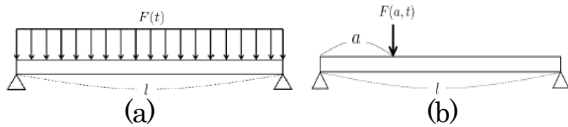
がもとまる. [2]

4 両端支持梁のランダム振動のモード解析

両端支持梁の固有モード $Y_n(x)$ は

$$Y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

である. 外力が $\omega_A \leq |\omega| \leq \omega_B$ でのみパワー S_0 をもつ有限帯域のホワイトノイズである場合, 第 n モードの位置に対するたわみの2乗時間平均値はそれぞれ以下で与えられる.



(1) 一様分布の場合

図(a)のように外力が梁に一様に加わる場合を考える. 外力は $F(x, t) = F(t)$ となる. このとき $S_{qn}(\omega)$ と $S_F(\omega)$ の関係は

$$S_{qn}(\omega) = \left(\frac{\sqrt{2}l\alpha_n}{n\pi}\right)^2 S_F(\omega)$$

となるので $\sqrt{y_n^2}$ は

$$\begin{aligned} \sqrt{y_n^2} &= \sqrt{\tau_n^2 Y_n(x)} = \sqrt{E[\tau_n^2] Y_n(x)} \\ &= \left(\frac{l\alpha_n}{n\pi m_n \omega_n}\right) \left\{ \frac{S_0}{\pi} \left(-\frac{2\omega_B}{\omega_B^2 - \omega_n^2} + \frac{1}{\omega_n} \log \left| \frac{\omega_B + \omega_n}{\omega_B - \omega_n} \right| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\omega_A}{\omega_A^2 - \omega_n^2} - \frac{1}{\omega_n} \log \left| \frac{\omega_A + \omega_n}{\omega_A - \omega_n} \right| \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \end{aligned}$$

となる. $\sqrt{y_n^2}$ は $x = l/m$ (ただし, m は $m < n$ を満たす整数) で最大値をとり, その値を $\sqrt{y_n^2}_{\max}$ とおく.

(2) 集中外力の場合

図(b)のような集中外力が加わる場合を考える. この場合外力は $F(x, t) = F(t)\delta(x - a)$ となる.

このとき $S_{qn}(\omega)$ と $S_F(\omega)$ の関係は

$$S_{qn}(\omega) = 2\sin^2\left(\frac{n\pi a}{l}\right) S_F(\omega)$$

となるので $\sqrt{y_n^2}$ は

$$\begin{aligned} \sqrt{y_n^2} &= \sqrt{\tau_n^2 Y_n(x)} = \sqrt{E[\tau_n^2] Y_n(x)} \\ &= \frac{1}{2\omega_n m_n} \left\{ \frac{S_0}{\pi} \sin^2\left(\frac{n\pi a}{l}\right) \left(-\frac{2\omega_B}{\omega_B^2 - \omega_n^2} + \frac{1}{\omega_n} \log \left| \frac{\omega_B + \omega_n}{\omega_B - \omega_n} \right| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\omega_A}{\omega_A^2 - \omega_n^2} - \frac{1}{\omega_n} \log \left| \frac{\omega_A + \omega_n}{\omega_A - \omega_n} \right| \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \end{aligned}$$

となる. $\sqrt{y_n^2}$ は $x = l/m$ (ただし, m は $m < n$ を満たす整数) で最大値をとり, その値を $\sqrt{y_n^2}_{\max}$ とおく.

5 まとめ

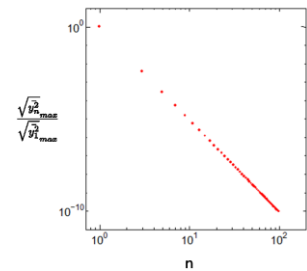
梁の部材を鋼鉄, 断面形状を幅10cm, 厚さ5cmとした. 外力のもつ周波数帯域は, 梁の基本振動数よりも低くなるように設定した.

- ・一様分布外力の場合.

得られた結果より, 縦軸を $\sqrt{y_n^2}_{\max} / \sqrt{y_1^2}_{\max}$, 横軸を

モード番号 n とした図は以下ようになる

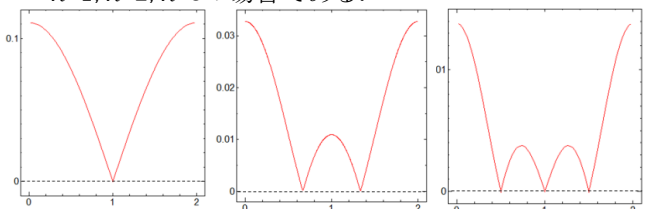
外力のもつ周波数帯域が梁の第1モードの固有振動数よりも低いところにある場合, その外力による梁のランダム振動はおおよそ第1モードのみの振動と近似しても問題なさそうである.



- ・集中外力の場合

縦軸を $\sqrt{y_n^2}_{\max} / \sqrt{y_1^2}_{\max}$, 横軸を外力が働く位置

a [m]とした図は以下ようになる. 左から $n=1, n=2, n=3$ の場合である.



一様分布外力の場合と同様, 外力のもつ周波数帯域が梁の第1モードの固有振動数よりも低いところにある場合, 第1モードがその他のモードに比べ励起されやすい. また, 各モードごとの位置の2乗時間平均値がそれぞれのモードの形に大きく依存しており, 外力が加わる位置が中央付近にある場合に比べ, 境界付近にある場合のほうが第1モードに対する各モードの2乗時間平均値の比が大きくなる.

6 参考文献

- [1] 徳岡辰雄: 工学基礎 振動論 (大洋社, 1984).
- [2] 小林繁夫: 振動学 (丸善株式会社, 1994)