計算応用科学分野

題目 多状態システムの信頼度の計算方法と上・下界について

学籍番号 23413516 氏名 大隅　渓
指導教員名 大鑄　史男教授

1. 背景と目的

システムの機能を高めるためには，システムが正常に機能している確率を計算し，その結果を元にシステムの設計を検討する必要がある．この確率を信頼度と呼ぶ．システムの信頼度はシステムの構造と部品の信頼度に依存している．従来，部品・システムがとる状態は正常，または故障という 2 つの状態のみと仮定してきた [1]．このようなシステムを 2 状態システムと呼ぶ．しかし現実にはその中間的な状態が存在する．部品・システムがとる状態が 2 つ以上であると仮定したシステムを多状態システムと呼ぶ.

システムの信頼度を計算するためには，システムの構造を定式化しなければいけない [2]．2 状態システムの構造を定式化するためには FTA と呼ばれる手法が用いられる．しかし FTA は多状態システムに適用できない．そこで FTA を多状態システムに適用する方法を定式化することを 1 つ目の目的とする.

システムが巨大化・複雑化するとシステムの信頼度を計算するとき，計算量が非常に多くなる [3]．そこで近似値として上・下界が計算されている [3][4]．2 状態システムではモジュールという概念を用いて上・下界を計算すると良い近似値となったが，多状態システムにおいてモジュールを用いた上・下界は求められていないため，これらを求めることを 2 つ目の目的とする.

2. 多状態システム

定義 2.1(システム) n 個の部品からなる多状態システムとは以下を満たす組 (Ω_C, S, φ) である.

1) $C = \{1, \cdots, n\}$ は 1 から n の整数からなる集合で，各数字は部品の番号を表す.

2) $\Omega_i = \{0, \cdots, N_i\}$ $(i \in C)$ は 0 から N_i の整数からなる有限な全順序集合であり，部品 i の状態空間を表す．$x_i \in \Omega_i$ は部品 i の状態を表す.

3) $\Omega_C = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$ は $\Omega_i (i \in C)$ の直積である．各要素 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega_C$ を状態ベクトルと呼び，部品の状態の組を意味する.

4) $S = \{0, \cdots, N\}$ は 0 から N の整数からなる有限な全順序集合であり，システムの状態空間を表す.

5) φ は Ω_C から S への全射であり，構造関数と呼ばれる．$\boldsymbol{x} \in \Omega_C$ に対し $\varphi(\boldsymbol{x})$ は部品の状態の組が状態ベクトル $\boldsymbol{x}$ により与えられたときのシステムの状態を表す.

最小の要素 0 は完全に故障していることを意味し，最大の要素 N_i や N は完全に機能していることを意味する.

$MI(\varphi^{-1}(t \le))$ はシステムの状態が t 以上となるときの状態ベクトル $\boldsymbol{x}$ の極小元からなる集合である.

$MA(\varphi^{-1}(< t))$ はシステムの状態が t 未満となるときの状態ベクトル $\boldsymbol{x}$ の極大元からなる集合である.

定義 2.2(単調性) $\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y} \Rightarrow \varphi(\boldsymbol{x}) \le \varphi(\boldsymbol{y})$ のときシステムは単調であるという.

定義 2.3(normal 性) システム φ は $\forall s \in S$ に対し以下が成立するときとき normal と呼ばれる.

$\forall \boldsymbol{x} \in MI(\varphi^{-1}(s \le))$, $\varphi(\boldsymbol{x}) = s$,

$\forall \boldsymbol{x} \in MA(\varphi^{-1}(\le s))$, $\varphi(\boldsymbol{x}) = s$.

システムの構造は $MI(\varphi^{-1}(t \le))$ 及び $MA(\varphi^{-1}(< t))$ によって決まる.

定義 2.4(モジュール分割) 部品の集合 C の分割 $\mathcal{A} = \{A_m \mid 1 \le m \le r\}$ は以下を満たすとき，システム φ のモジュール分割であるという.

$\forall \boldsymbol{x}$, $\varphi(\boldsymbol{x}) = \psi(\chi_1(\boldsymbol{x}_1), \cdots, \chi_r(\boldsymbol{x}_r))$.

を満たすシステム χ_m $(1 \le m \le r)$ と ψ が存在する．また A_m をモジュールと呼ぶ．ただし $\boldsymbol{x}_m$ $(m = 1, \cdots, r)$ は，集合 A_m に属する部品の状態ベクトルである.

3. 多状態システムの分解と統合

FTA では，事象が起きる，起きない，の 2 状態でしか考えられないので，そのまま多状態システムを FTA で解析することはできない．そこで次のような方法をとれば多状態システムを FTA で解析することができる.

(1) まず多状態システムを一度 2 状態システムに分解する.

(2) 次に分解された 2 状態システムに FTA を行い，構造を定式化する.

(3) 分解された 2 状態システムの構造を用いて多状態システムの極小元を決定する.

分解された 2 状態システムの構造から多状態システムの構造を定式化することを統合と呼ぶ．詳細は本論にゆずる.

4. 多状態システムの信頼度

4.1. 多状態システムの信頼度

P を確率とする．$P\{\boldsymbol{x} \mid \varphi(\boldsymbol{x}) \geq t\}$ はシステムの状態が t 以上となる確率だが，混乱が無い場合単に多状態システムの信頼度と呼ぶ．同様に $P\{\boldsymbol{x} \mid x_i \geq s\}$ を部品 i の信頼度と省略して呼ぶ．

定義 4.1(associated) 確率 P は，Ω_C の任意の increasing な部分集合 A と B について次を満たすとき associated であるという．

$$P(A \cap B) \geq P(A)P(B).$$

全ての部品が互いに独立のときは，associated の条件を満たす．

多状態システムの信頼度は極小元または極大元及び包除原理を用いて計算できる．$MI\left(\varphi^{-1}(t \leq)\right)$ の要素を $\boldsymbol{y}^1, \cdots, \boldsymbol{y}^{p_t}$ とすると，

$$P\{\boldsymbol{x} \mid \varphi(\boldsymbol{x}) \geq t\} = \sum_{a=1}^{p_t}\left((-1)^{a+1}\sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_a \leq p_t} P\left\{\boldsymbol{x} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \geq \bigvee_{j=1}^{a} \boldsymbol{y}^{k_j}\right\}\right).$$

ただし $\bigvee_{j=1}^{a} \boldsymbol{y}^{k_j}$ は $\{\boldsymbol{y}^{k_j} \mid 1 \leq j \leq a\}$ の上限である．

4.2. 多状態システムの信頼度の上・下界

定理 4.1 P が associated であり，φ が単調であるとき以下が成立する．

$$\prod_{\boldsymbol{z} \in MA(\varphi^{-1}(<t))} P\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \not\leq \boldsymbol{z}\} \leq P\{\boldsymbol{x} \mid \varphi(\boldsymbol{x}) \geq t\} \leq \coprod_{\boldsymbol{y} \in MI(\varphi^{-1}(t \leq))} P\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}\}.$$

ただし演算子 $\prod$ と $\coprod$ はそれぞれ以下を意味する．

$\boldsymbol{q} \in [0,\ 1]^n$，$\prod_{i=1}^{n} q_i = q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_n$.

$\boldsymbol{q} \in [0,\ 1]^n$，$\coprod_{i=1}^{n} q_i = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - q_i)$.

この上・下界をそれぞれ φ の上界，φ の下界と省略して呼ぶ．

4.3. 多状態システムの信頼度のモジュールを用いた上・下界

定理 4.2 P が asoociated であり，φ がモジュール分割でき，φ, ψ, χ_m が単調かつ，各モジュール χ_m $(m = 1, \cdots, r)$ が normal かつ 互いに独立であるとする．注目する $t \in S$ に対し

$$\begin{aligned} L0(t) &= \varphi \text{ の下界} \\ L1(t) &= \psi \text{ の下界と } \chi_m \text{ の下界の組合せ} \\ L2(t) &= \psi \text{ の下界} \\ U0(t) &= \varphi \text{ の上界} \\ U1(t) &= \psi \text{ の上界と } \chi_m \text{ の上界の組合せ} \\ U2(t) &= \psi \text{ の上界} \end{aligned}$$

として以下が成立する．

$$\begin{aligned} L0(t) &\overset{(1)}{\leq} L1(t) \leq L2(t) \\ &\leq P\{\boldsymbol{x} \mid \varphi(\boldsymbol{x}) \geq t\} \\ &\leq U2(t) \leq U1(t) \overset{(2)}{\leq} U0(t). \end{aligned}$$

図 1 は，上記の不等式が成立するときの条件を満たすあるシステムにおいて，ある 1 つの部品の信頼度 p を 0 $\rightarrow$ 1 と変化させ，その他の部品の信頼度はある一定の値にしたときの信頼度 $P\{\boldsymbol{x} \mid \varphi(\boldsymbol{x}) \geq 1\}$ と上・下界の様子である．ただし煩雑さを避けるため，信頼度の真値 $P\{\boldsymbol{x} \mid \varphi(\boldsymbol{x}) \geq 1\}$ を $real(1)$ として，$real(1)$，$L0(1)$，$L1(1)$，$U0(1)$，$U1(1)$ のみをプロットした．グラフ内において上から順に $U0(1)$，$U1(1)$，$real(1)$，$L1(1)$，$L0(1)$ である．

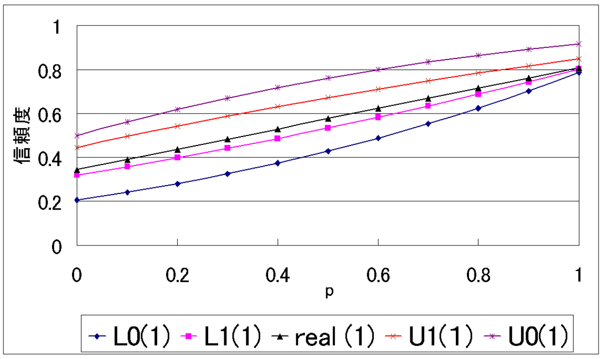

図 1: 多状態システム φ が 1 以上となる事象の信頼度と上・下界

5. まとめ

1 つめの目的について : 多状態システムに FTA を適用する方法を定式化できた．

2 つ目の目的について : (1) の不等式から，ψ の下界と χ_m の下界を組合せたほうが，直接求めた φ の下界より，よりよい事が分かる．上界についても同様である．これらは，信頼性評価において，システムの下位レベルのモジュールから順に上・下界を組み合わせていくことで，よりよい評価が得られることを意味し，評価・設計者に取って都合のよいものになっている．

参考文献

[1] R. E. Barlow and F. Proschan (1975), Statical Theory of Reliability of Life Testing, New York, Holt, Rinehart and Winston.

[2] Anatoly Lisnianski and Gregory Levitin(2003), MULTI-STATE SYSTEM RELIABILITY, World Scientific.

[3] Bent Natvig(2011), Multistate Systems Reliability Theory with Applications, A John Wiley and Sons, Ltd.,Publication.

[4] F. Ohi, Stochastic evaluation of Multi-State Coherent Systems, 数理解析研究所講究録 1802，pp.200-206