平成 24 年度創成シミュレーション工学専攻修士論文梗概集

計算応用科学分野

新規参入ノードの次数が時間変化する場合への BA モデルの拡張とスケールフリー性成立の条件について

学籍番号　23413527　　氏名　國谷　啓太
指導教員名　大鑄　史男

1　はじめに

複雑ネットワークの重要な性質にスケールフリー性という性質がある．スケールフリーネットワークという概念の起こりは，バラバシ (Barabási) とアルバート (Albert) らの研究が始まりである．彼らが 1999 年に発表した論文は [1]，当時のネットワーク科学の研究分野で大きな反響を呼んだ．複雑ネットワークにおけるスケールフリー性とはネットワークの次数分布がべき則に従うという現象で，実際に現実に存在する複数のネットワーク (性交渉のネットワーク [3]，SNS 上の人間関係 [9]，携帯電話の通話記録 [4] 等) からこの性質が観測されている．また，バラバシとアルバートはこの論文 [1] で，スケールフリー性を再現するネットワークの数理モデルを提案しており，このネットワークモデルは彼らの頭文字をとって BA モデルと通称され，後に他の研究者によって提案される幾つかのモデル (適応度モデル [2]，Dorogovtsev-Mendes-Samukhin のモデル [10] 等) に影響を与えている．これらのモデルは共通点としてネットワークが成長するという要素を含んでいる．筆者は，BA モデルに対して「ネットワークの成長が時間変化する」という拡張を加え，その拡張要素がネットワークモデルの次数分布にどの様な影響を与えるのかの検証を行った．本論は BA モデルの紹介と，筆者が行った BA モデルへの拡張とその解析結果の紹介を目的としている．

2　BA モデル

BA モデルの特徴は，ネットワークが時間と共に頂点と辺を付け加えていく「成長」の他に，辺を付け加える際に次数の大きい頂点ほど選ばれやすいようにする「優先的選択」の二つの概念を取り入れたことである．以下に BA モデルの生成方法を記す．

- (i) $m_0 \geq 1$ 個の頂点から，完全グラフ K_{m_0} を作る．
- (ii) 新しい頂点を 1 個追加する (成長).
- (iii) 追加した頂点から $m(\leq m_0)$ 本の辺を既存の頂点とつなぐ．接続先の頂点は頂点の次数に比例した確率で決まるものとする (優先的選択).
- (iv) $(i) \sim (iii)$ までの過程を繰り返す．

完全グラフとは全ての頂点が互いに辺で結ばれたグラフの事を指す．過程 (iii) において，ある頂点 i が接続先として選ばれる確率 $\Pi_i(t)$ を以下の様に定義する．

$$\Pi_i(t) = \frac{k_i(t)}{\sum_{j=-m_0+1}^{t} k_j(t)}$$

$k_i(t)$ は頂点 i の時刻 t における次数，すなわち接続している辺の個数を表す．上式の分母は i を含めたネットワーク全体の次数の合計である．この $\Pi_i(t)$ の効果により，次数の大きい頂点ほど新たな頂点の接続先として選ばれやすくなる．これが BA モデルにおける優先的選択である．

次数と時刻 t を近似的に連続変数として扱った手法 [1][8, 99-101 ページ] によって BA モデルの次数分布 $p(k)$ は次の様に求められる．

$$p(k) = \frac{2m^2 t}{k^3(m_0+t)} = O(k^{-3})$$

次数分布 $p(k)$ とは次数 k の頂点がネットワーク中にどれだけの割合で存在するかを表す確率密度である．次数分布がべき則に従うというのは次数分布が $p(k) = Nk^{-\gamma}$ (N : 規格化定数) となる時をいうが．BA モデルの次数分布はべき指数 $\gamma = 3$ のべき則に従うという事になる．

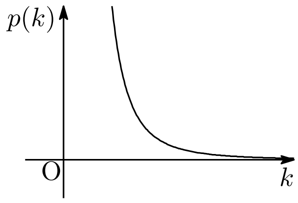

図 1: べき分布

$p(k)$ は k の増大に伴って減少していくが，指数分布や正規分布に従う場合に比べれば減り方は遅い．よって BA モデルのネットワーク中には「ハブ」と呼ばれる巨大な次数を持つ頂点が少ないながらもそれなりの数存在している事になる．こうした小数の「ハブ」と小さい次数を持つ多数の頂点が共に存在しているのがスケールフリーネットワークの特徴である．

3　BA モデルの拡張

BA モデルでは毎ステップごとに頂点が 1 つと辺が m 本追加され，ネットワークが成長していった．我々が注目したのは毎ステップごとに追加される辺の数である．BA モデルのそれが一定であるのに対し，我々は毎ステップごとに追加される辺の数を時間によって変化する数列 m_t で置き換えた．今回我々はステップごとに追加される辺の数を $m_t = Ht^d$ $(H > 0, -1 \leq d \leq 1)$ と置き解析を行った．m_t は時刻 t が進むごとに，$d > 0$ で増加，$d < 0$ で減少する．このように拡張した BA モデルに対して，通常の BA モデルと同じく連続近似による次数分布の導出を行い，$p(k)$ について以下の様な結果を得た．

$$p(k) = \begin{cases} O\left(k^{-1}\exp\left(-k^2\right)\right) & (d=-1) \\ O\left(k^{-1-\frac{2}{d+1}}\right) & (-1<d<0) \\ O\left(k^{-3}\right) & (d=0) \\ O\left(k^{-2}\right) & (d=1) \end{cases}$$

上式を見ると，$-1 < d < 1$ の時はべき則に従い，$d = -1$ の時はべき則では無い事が分かる．この結果を d と γ の関係についてまとめると以下の図の様になる．

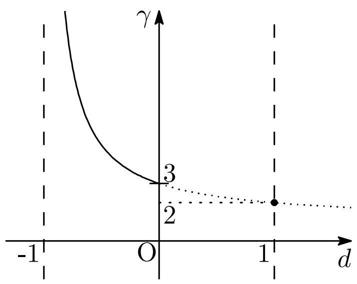

図 2: $\gamma = 1 + 2/(d+1)$ のグラフ

点線で表した範囲は今回の解析では導出できなかった範囲であり，予想値を示してある．$p(k) = O(k^{-\gamma})$ は γ が大きいほど減少が早くなるので，d が小さいほど次数分布 $p(k)$ の裾は薄く，逆に d が大きいほど次数分布の裾は厚くなると考えられる．$d = -1$ の時の $p(k)$ は $\exp\left(-k^2\right)$ の効果によってべき則よりも早く減少し，次数分布の裾はさらに薄くなると考えられる．

こうした結果が出たのは，まず，$d > 0$ の場合は m_t が時間経過にしたがって増加していく為ネットワーク全体の次数が多くハブが形成され易く，ハブの数が多くなる事が，次数分布の裾が厚くなる理由であると考えられる．

逆に，$-1 \leq d < 0$ では，m_t は時間経過にしたがって減少していく．新しく加入する頂点の次数が下がって行く一方で，初期の頂点は比較的大きい次数を持つので，m_t の減少が早いほど初期の頂点ばかりに次数が集中する事になる．これが d が小さいほど次数の小さい頂点はより多く，ハブはより少ないという次数分布の裾が薄いネットワークになる理由だと考えられる．

4　今後の課題

今後の課題としては，$0 < d < 1$ の際の次数分布の導出は今回の連続近似を使った手法では出来なかったので新たな手法を導入して改めて次数分布を求めたい．また，今回用いた連続近似による次数分布の導出法では m_t が 1 以下になる事も考えられるが，次数の定義から考えて本来 m_t は正の整数に限られるはずである．という問題がある．その為，m_t が正の整数であるという条件を課したシミュレーションを行う事で $m_t < 1$ の許容が次数分布に与える影響の有無を確かめ，純粋に m_t の増減だけが本論で求めた γ と d の関係をもたらしているのか否かが分かるはずである．

5　参考文献

[1] A.-L.Barabási and R.Albert *"Emergence of scaling in random networks"* Suience, Vol.286, pp.509-512 (1999)

[2] G.Bianconi and A.-L.Barabási *"Competition and multiscaling in evolving networks"* Europhysics Letters, Vol.54, pp.436-442 (2001)

[3] M.C.Göpfert and D.Robert *"The web of human sexual contacts"* Nature, Vol.411, pp.907-908 (2001)

[4] J.P.Onnela and J.Saramäki and G.Szabó and D.Lazer and K.Kaski and J.Kertész and A.-L.Barabási *"Structure and tie strengths in mobile communication networks"* PNAS, Vol.104, No.18, pp.7332-7336 (2007)

[5] 今野紀雄, 井手勇介『複雑ネットワーク入門』講談社サイエンティフィク (2008)

[6] 増田直紀, 今野紀雄『複雑ネットワークの科学』産業図書 (2005)

[7] 増田直紀, 今野紀雄『「複雑ネットワーク」とは何か』講談社ブルーバックス (2006)

[8] 増田直紀, 今野紀雄『複雑ネットワーク　基礎から応用まで』近代科学社 (2010)

[9] 松尾豊, 安田雪『SNS における関係形成原理━mixi のデータ分析━』人工知能学会論文誌 22 巻 5 号 G pp.531-541 (2007)

[10] S.N.Dorogovtsev and J.F.F.Mendes and A.N.Samukhin *"Structure of Growing Networks with Preferential Linking"* Physical Review Letters, Vol.85, pp.4633-4636 (2000)