

圧縮性乱流におけるスケール間エネルギー輸送

学籍番号 23413552 氏名 中嶋 大樹

指導教員名 後藤 俊幸

1 はじめに

我々の周りの流体には、圧力や温度により密度が変化する性質がある。その変化率が大きい流体のことを圧縮性流体といい、音速に近いまたはそれ以上の流速を持つ流体がこれに当てはまる。例として超新星の爆発、太陽風、また燃焼などの現象があり、それらを解析する1つの方法として圧縮性乱流の数値シミュレーションは極めて有用である。本研究では圧縮性一様等方性乱流における圧縮、非圧縮成分間でのエネルギー交換や低波数、波数間でのエネルギー輸送、マッハ数、レイノルズ数の違いによる $\text{div } \mathbf{u}$ 等の変化を大規模シミュレーションにより解析する。

圧縮性乱流の数値的研究において、空間、時間の解像度は大変重要であることは良く知られている。コルモゴロフ長さとは時間とはそれぞれレイノルズ数の増大と共に小さくなるので、高レイノルズ数乱流における直接数値計算を行うには、大きな計算資源を必要とする。このため、現在の大規模計算においては、並列計算機を用いることが一般的になっている。乱流の数値計算における代表的な手法には差分法、スペクトル法などが挙げられる。差分法は空間的にローカルに解くことができるため通信量が少なく済むが、精度はスペクトル法に比べ劣ってしまう。それに対し、スペクトル法では精度は良いがノード間のグローバルな通信が必要となり大規模計算には不向きである。そこで本研究では差分法として、計算負荷は低い精度の高い結合コンパクト差分スキームを用いた。

2 数値解析法

2.1 計算方法

一辺 2π の立方体の一様等方性乱流を考える。計算に用いる連続方程式、運動方程式、

エネルギー方程式は、次のように与えられる。

[1]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E u_j}{\partial x_j} = -u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_j \sigma_{ij} + \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

$$E = \frac{1}{2} \rho u_i u_i + \rho \epsilon$$

$$p = \rho RT$$

2.2 結合コンパクト差分スキーム

本研究では差分法として、結合コンパクト差分スキームを用いた。一般的な差分法では、微分を求めたい点の周りの点での関数の値を用いて計算を行うのに対し、結合コンパクト差分スキームでは周りの点での1階微分、2階微分の値を用いて計算する。そのため計算精度が上がり、1階微分、2階微分を同時に解くことができる。関数とその微分をそれぞれ f, f' とすると実際に用いる式は次のようになる。

$$\alpha(f'_{i-1} + f'_{i+1}) + f'_i + h\{\beta(f'_{i-1} + f'_{i+1})f'_i\}$$

$$= \frac{1}{h} \{b(f_{i+2} + f_{i-2}) + a(f_{i+1} + f_{i-1})cf_i\}$$

ここで、 h は格子幅であり、 f の定義された領域を L として空間の分割数を N とすれば $h = \frac{L}{N}$ 、係数 a, b, c, α, β は格子点 i を中心としたテイラー展開を行い、係数比較することで決定する。本研究では8次精度で計算を行った。

3 初期条件、境界条件

初期条件については、非圧縮でランダムな波数空間での速度場を与える。初期におけるエネルギースペクトルは、

$$E(k) = 16 \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_0^2 k_0^{-5} k^4 \exp\left(-2 \left(\frac{k}{k_0}\right)^2\right)$$

$$\frac{3}{2} u_0^2 = \int_0^\infty E(k) dk \quad k_0 = 6, u_0 = 1$$

とする。境界条件は周期境界条件を与えた。

4 計算結果

運動エネルギースペクトルの非圧縮成分を点線で、圧縮成分を点線で示したものを図 1 に挙げる。これを見ると非圧縮成分、圧縮成分共に時間が経つと高波数側の値が下がっており、エネルギーが高波数から低波数へと輸送されている様子が見られた。

スケール間のエネルギー輸送の指標となるエネルギー輸送関数の圧縮成分を図 2 に示す。初期に $k=6$ からエネルギーが抜かれ、高波数へ注入されているが、その後 $k=6$ を中心に変動が波動的に伝播している様に見える。

圧縮性の目安となる $\text{div } \mathbf{u}$ の確率密度関数を図 3 に示す。初期で裾野が開き、その後減衰していく様子が見られた。また、裾野の開き方が負の方向に偏っているため、膨張に比べ圧縮が強く起こっていることが分かる。

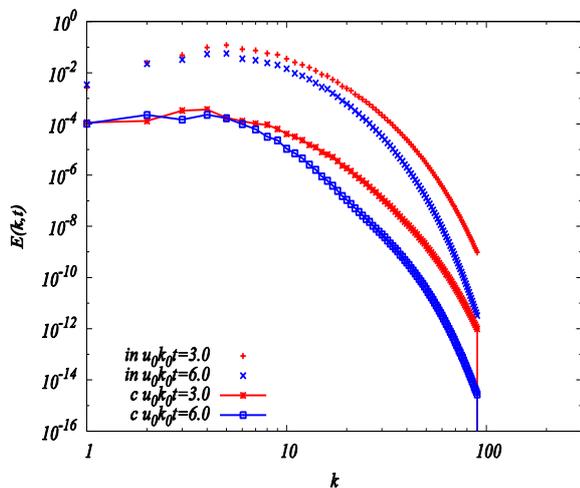


図 1 : エネルギースペクトル

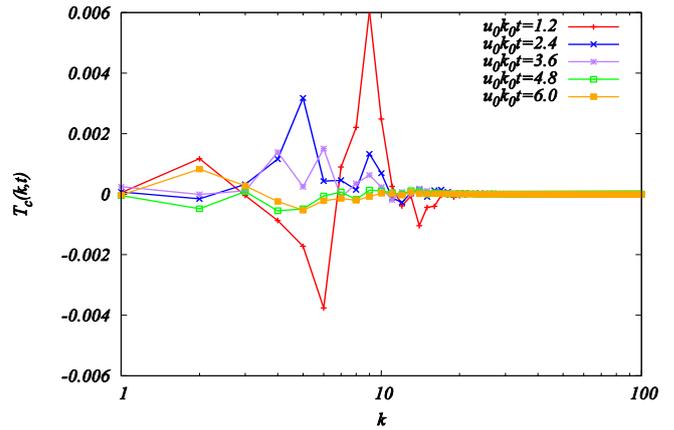


図 2 : エネルギー輸送関数(圧縮成分)

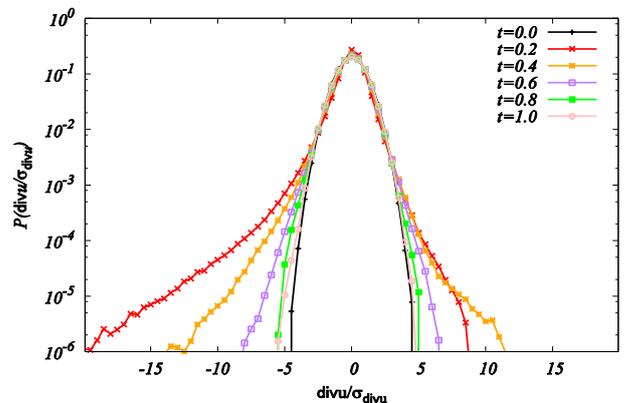


図 3 : $\text{div } \mathbf{u}$ の確率密度分布

5 まとめ

運動エネルギースペクトルの結果から、時間と共に高波数での値が小さくなる。一方、低波数側のスペクトルが増大している。このことよりスケールが大きくなっている様子が確認できた。圧縮成分でのスケール間エネルギー輸送については $k=6$ (初期エネルギースペクトルの最大値を与える波数) からのエネルギーが他のスケールへ波動的に輸送されることが分かった。

$\text{div } \mathbf{u}$ については、負の値が正に比べ強く出ており、局所的ではあるが強い圧縮の運動が起きていることが推測される。

6 参考文献

[1] R. Samtaney, D. I. Pullin, and B. Kosovic, "Direct numerical simulation of decaying compressible turbulence and shocklet statistics" Phys. Fluid **13** 1415 (2001)