

拡張された熱力学に基づく多原子分子希薄気体における横波の解析

学籍番号 23413570 氏名 水野 葉子

指導教員名 杉山 勝

1 はじめに

粘性流体の解析には、従来からナビエ・ストークス・フーリエ(NSF)理論がよく用いられてきた。この理論には横波の波動解が存在せず、粘性流体中を横波は伝播しないと考えられてきた。この理論は不可逆過程の熱力学(TIP)理論[1]に則っており、局所平衡の仮定を用いているため強い非平衡状態に対しては適用できない。この理論の欠点を克服した理論として、拡張された熱力学(ET)理論[2]があったが、単原子分子希薄気体にしか適用できなかった。しかし最近になって、ET理論が多原子分子希薄気体・濃密気体まで適用できるようになった[3]。この理論は双曲性を課した理論であり、横波の波動解が存在する。また、この理論はNSF理論を含むより広い理論であるので、横波の波動は、低振動数の弱い非平衡領域ではNSF同様観測するのが難しいが、NSFの適用範囲を超えた高振動数の領域では波動として観測できるのではないかと予想される。この理論による縦波の解析は行われており[4]、その結果より理論の妥当性が定量的に証明されている。

そこで本研究では、粘性流体の中でもまず多原子分子希薄気体について取り上げる。気体中を伝播する横波について、ET理論を用いて解析する。本研究の目的は、横波の実験的な検知可能性と、検知可能なときの横波の性質を定量的に評価することとする。

2 基礎式

独立変数として、密度 ρ 、速度 v_i 、温度 T 、粘性応力 $S_{(ij)}$ 、動圧 Π を採用する ET 理論を考える。多原子分子希薄気体において、気体の熱的・熱量的な状態方程式は以下のように表される。

$$p = \frac{k_B}{m} \rho T, \quad \varepsilon = \varepsilon(T)$$

ただし、 ε 、 p はそれぞれ内部エネルギー、圧力を意味する。

このとき、平衡状態のまわりで線形化された基礎式は以下のように与えられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{k_B}{m} T_0 \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{k_B}{m} \rho_0 \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{\partial S_{(ij)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{k_B}{m} \rho_0 c_v^* \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{k_B}{m} \rho_0 T_0 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} = 0$$

$$\frac{\partial S_{(ij)}}{\partial t} - 2 \frac{k_B}{m} \rho_0 T_0 \frac{\partial v_{(i}}{\partial x_{j)}} - \frac{2}{1 + c_v^*} \frac{\partial q_{(i}}{\partial x_{j)}} = -\frac{1}{\tau_S} S_{(ij)}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{c_v^*} \right) \frac{k_B}{m} \rho_0 T_0 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{2c_v^* - 3}{3c_v^*(1 + c_v^*)} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} = -\frac{1}{\tau_\Pi} \Pi$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + (1 + c_v^*) \left(\frac{k_B}{m} \right)^2 \rho_0 T_0 \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{k_B}{m} T_0 \frac{\partial S_{(ik)}}{\partial x_k} + \frac{k_B}{m} T_0 \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = -\frac{1}{\tau_q} q_i$$

ただし、0 付き添え字は平衡での値を、 $c_v^* = \frac{m}{k_B} \left(\frac{d\varepsilon}{dT} \right)_0$ は平衡における無次元化された定積比熱を意味する。 τ_S 、 τ_Π 、 τ_q は、それぞれ、せん断粘性率、体積粘性率、熱伝導率と関係する緩和時間である。

3 分散関係

x_i 方向に伝播する、調和的に振動する平面波を考える。このとき横波は一般的に以下のように書き表される。

$$\begin{cases} \rho = \rho_0, v_i = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{bmatrix}, T = T_0, \\ S_{(ij)} = \begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Pi = 0, q_i = \begin{bmatrix} 0 \\ q \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

ただし $\mathbf{u}=(v,S,q)$ は、波の振動数を ω 、波数ベクトルを $(k,0,0)$ とすると

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} e^{i(\omega t - kx_1)}$$

と表される。 \mathbf{w} 、 \mathbf{i} はそれぞれ \mathbf{u} の振幅を表す定ベクトル、虚数単位である。

このとき分散関係は以下のように得られる。

$$-\frac{k_B}{m} T_0 \left(\frac{2 + c_v^*}{1 + c_v^*} - \frac{\mathbf{i}}{\Omega \tau_{qS}} \right) z^2 + 1 - \frac{1}{\Omega^2 \tau_{qS}} - \mathbf{i} \frac{1 + \tau_{qS}}{\Omega \tau_{qS}} = 0$$

ただし、

$$\Omega = \tau_S \omega, \quad \tau_{qS} = \frac{\tau_q}{\tau_S}, \quad z = \frac{k}{\omega}$$

として無次元化した。無次元化された位相速度・減衰係数は、以下のように表される。

$$\begin{cases} \frac{v_{ph}}{c_0} = \frac{1}{c_0} \frac{1}{\text{Re}(z)} \\ c_0 \tau_S \alpha = -c_0 \Omega \text{Im}(z) \end{cases}$$

また、実験的な横波の検知可能性を示す量として、減衰特性 $\alpha\lambda$ を考える。ただし λ は波長である。

$$\alpha\lambda = \frac{2\pi v_{ph} \tau_S \alpha}{\Omega}$$

これは無次元量である。横波の振幅は、波動が 1 波長分の距離進む毎に $\frac{1}{e^{\alpha\lambda}}$ 倍に減衰する。これより、少なくとも $\alpha\lambda$ が 10^0 のオーダーより小さくなければ、実験的に横波を検知することは難しいと考えられる。

4 水素気体における結果と考察

例として、水素気体とその異性体・同位体について計算した。各パラメータは [4,5] から表 1 のように与えられる。ただし圧力 $p_0=1000$ [Pa] とした。

表 1: 水素気体のパラメータ

気体分子の種類	T_0 [K]	c_v^*	μ [$\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$]	κ [$\frac{\text{mW}}{\text{m}\cdot\text{K}}$]	$\frac{k_B}{m}$ [$\frac{\text{km}^2}{\text{s}^2\cdot\text{K}}$]	c_0 [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$]	τ_S [ns]
n-H ₂	77.3	1.57	3.50	49.8	4.12	723	3.50
	293	2.45	8.82	182	4.12	1300	8.82
	90.2	1.99	3.97	63.6	4.12	748	3.97
p-H ₂	77.3	1.76	3.50	52.7	4.12	707	3.50
	90.2	1.99	3.97	63.6	4.12	748	3.97
	293	2.61	8.82	192	4.12	1290	8.82
n-D ₂	77.3	2.54	4.82	45.6	2.06	472	4.82
	293	2.50	12.3	131	2.06	920	12.3
o-D ₂	77.3	2.93	4.82	49.4	2.06	463	4.82
	90.2	2.96	5.50	55.6	2.06	499	5.50
	293	2.50	12.3	131	2.06	920	12.3
HD	77.3	2.55	4.21	51.9	2.75	544	4.21
	293	2.50	10.8	149	2.75	1060	10.8

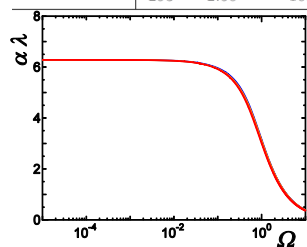


図 1: $\alpha\lambda$ の温度を変えた場合との比較 (p-H₂ 赤: $T_0=293$ [K], 黄: 90.2 [K], 青: 77.3 [K])

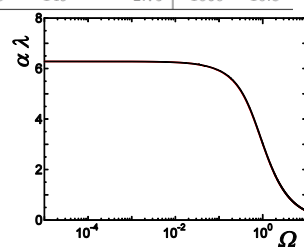


図 2: $\alpha\lambda$ の核スピン異性体との比較 ($T_0=293$ [K], 黒:n-H₂, 赤:p-H₂)

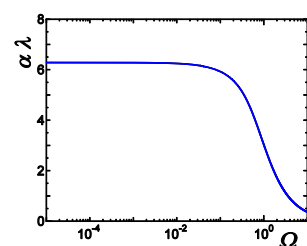


図 3: $\alpha\lambda$ の重水素との比較 ($T_0=293$ [K], 黒:n-H₂, 青:n-D₂)

図 1 を見ると、 Ω がおよそ $2\sim 3 \times 10^0$ 程度以上の領域で $\alpha\lambda$ は 10^0 のオーダーより小さくなる。よって、横波は Ω がおよそ 10^0 のオーダー以上であるとき、実験的に検知可能である。これは水素気体とその核スピン異性体、重水素気体を含めて、温度によらず

同様である。このとき対応する ω の値は τ_S の値に依るが、例えば温度 293 [K] の n-H₂ 気体の場合、 Ω が 10^0 のオーダーのとき ω が 0.1 [GHz] 程度のオーダーになる。

検知可能であるときの横波の波長は、このとき $\frac{v_{ph}}{c_0} \simeq 1.0$ とみなすと、以下のように求まる。

$$\lambda \simeq \frac{2\pi c_0 \tau_S}{\Omega}$$

例えば温度 293 [K] の n-H₂ 気体の場合、 λ は Ω が 10^0 程度のとき数 $10\mu\text{m}$ オーダー、 Ω が 10^1 程度のとき数 μm オーダーになる。一方、分子の平均自由行程 l は

$$l \simeq 4.40 \times 10^{-9} \times T[\text{m}]$$

となる。例えば温度 293 [K] の n-H₂ 気体の場合、 l は数 μm オーダーになる。これらより、 Ω が 10^1 のオーダー辺りのとき、横波の波長と分子の平均自由行程が同じくらいのオーダーになると分かる。表 1 より他の気体についても同様に計算すると、 Ω がおよそ 5×10^1 あたりを超えた領域では、横波の波長、分子の平均自由行程ともに数 μm オーダーになる。

5 まとめ

多原子分子希薄気体中を伝播する横波について、ET を用いて解析した。例として水素気体について定量的に評価した結果、以下のことが分かった。

- Ω が小さい領域では、横波は減衰が非常に大きく、実験的に波として検知することが難しい。
- Ω が 10^0 のオーダー以上のとき、横波は実験的に検知できる。
- Ω が 10^1 のオーダー以上のとき、分子の平均自由行程が横波の波長を上回り始める。
- これらの性質は、温度や核スピンの方向の違いや同位体における質量の違いに依らない。

6 参考文献

- [1] Noëlle Pottier: *Nonequilibrium Statistical Physics*, (Oxford University Press, 2009).
- [2] I.Müller and T.Ruggeri: *Rational Extended Thermodynamics*, (Springer, New York, 1998).
- [3] T.Arima, S.Taniguchi, T.Ruggeri and M.Sugiyama: *Cont. Mech. Thermodyn.*, 24, pp.272-292, (2012).
- [4] T. Arima, S. Taniguchi, T. Ruggeri and M. Sugiyama: *Cont. Mech. Thermodyn.*, DOI: 10.1007/s00161-012-0271-8, (2012).
- [5] 長倉三郎, 井口洋夫, 江沢洋, 岩村秀, 佐藤文隆, 久保亮五 編: 『岩波 理化学辞典 第 5 版』, (岩波書店, 1998).